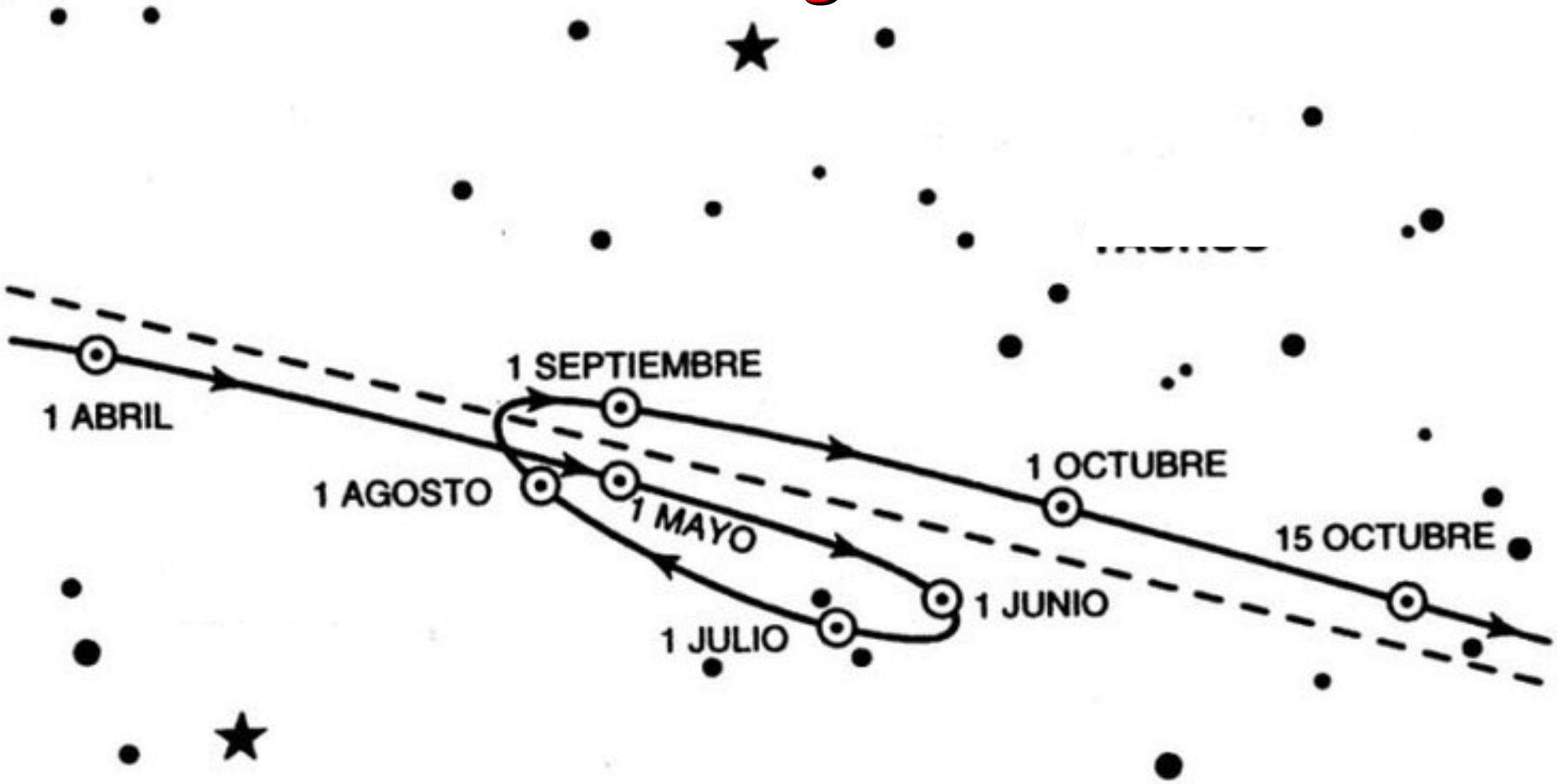
movimiento planetario

movimiento de los planetas entre las estrellas

movimiento retrógrado de Marte

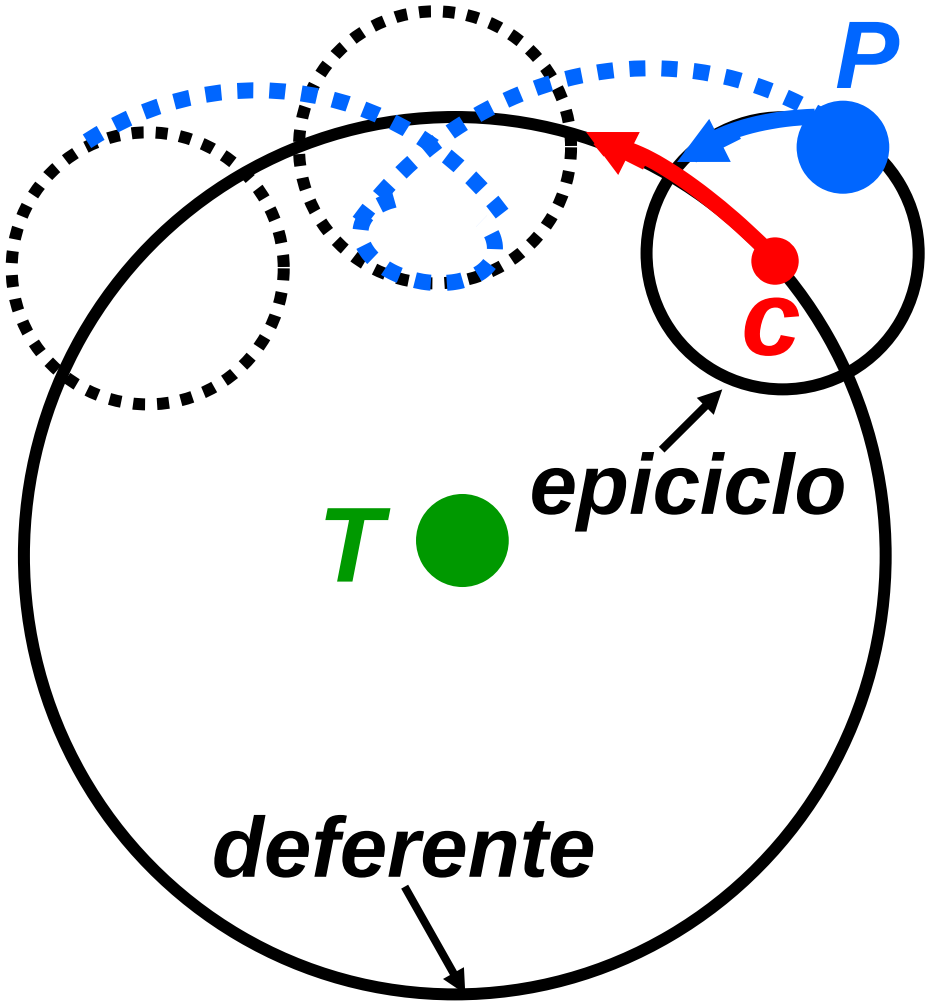


cada 26 meses Marte retrograda durante 2 meses y medio

los cuerpos celestes son las sustancias más perfectas, cuyos movimientos se rigen por principios distintos de los cuerpos en el mundo sublunar. Estos últimos están compuestos por uno o todos los cuatro elementos clásicos y son perecederos; pero la materia de la cual están hechos los cielos es de éter imperecedero por lo que no están sujetos a generación y corrupción. Sus movimientos son eternos y perfectos, y el movimiento perfecto es el circular, que, a diferencia de los terrenales, puede durar eternamente.

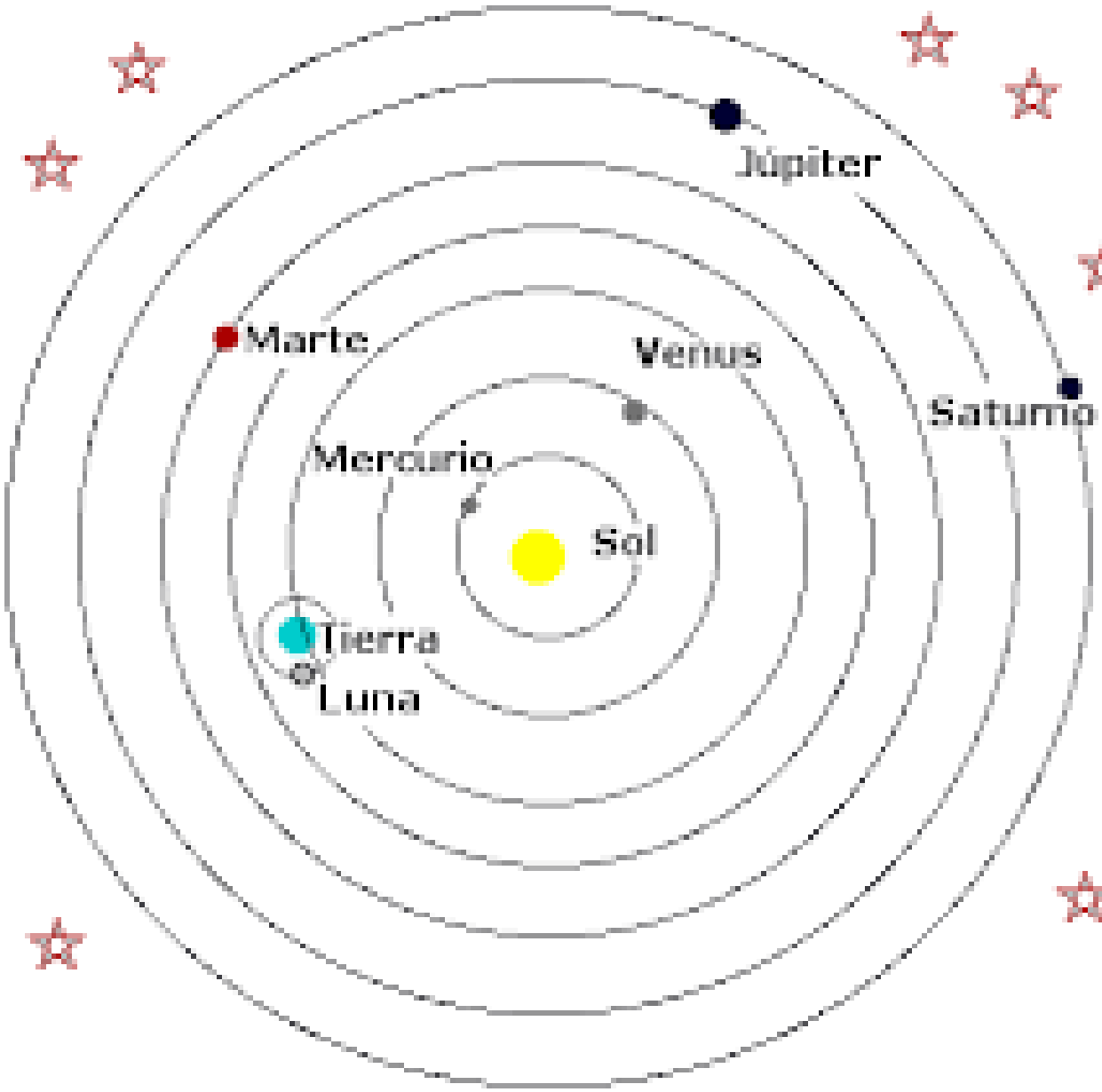
(Sobre el cielo, Aristóteles, año 350 a. C.)

modelo de Ptolomeo (siglo II DC)



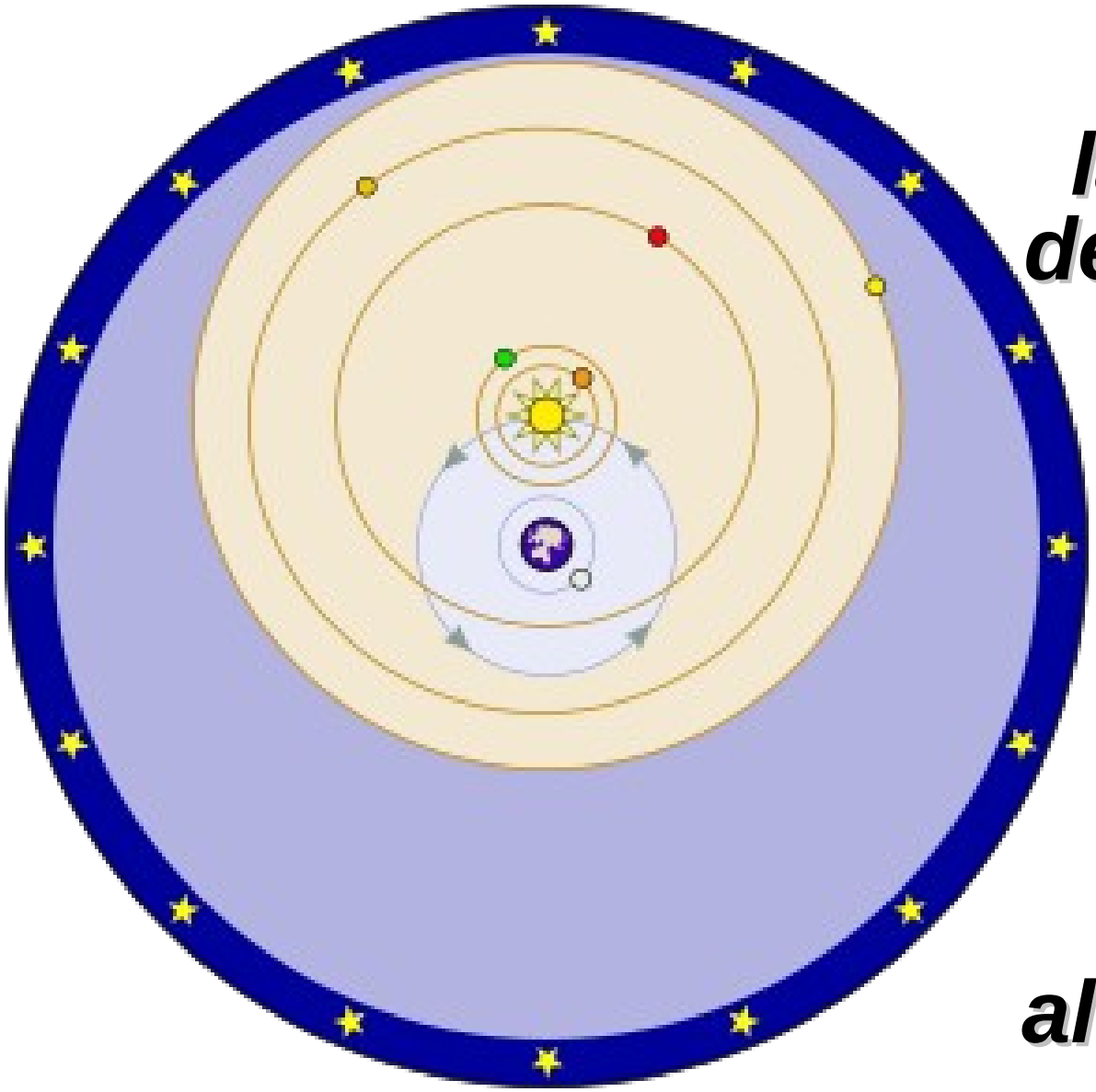
los planetas se mueven describiendo circunferencias llamadas epiciclos, cuyos centros se mueven describiendo circunferencias llamadas deferentes

modelo de Copérnico (1473-1543)



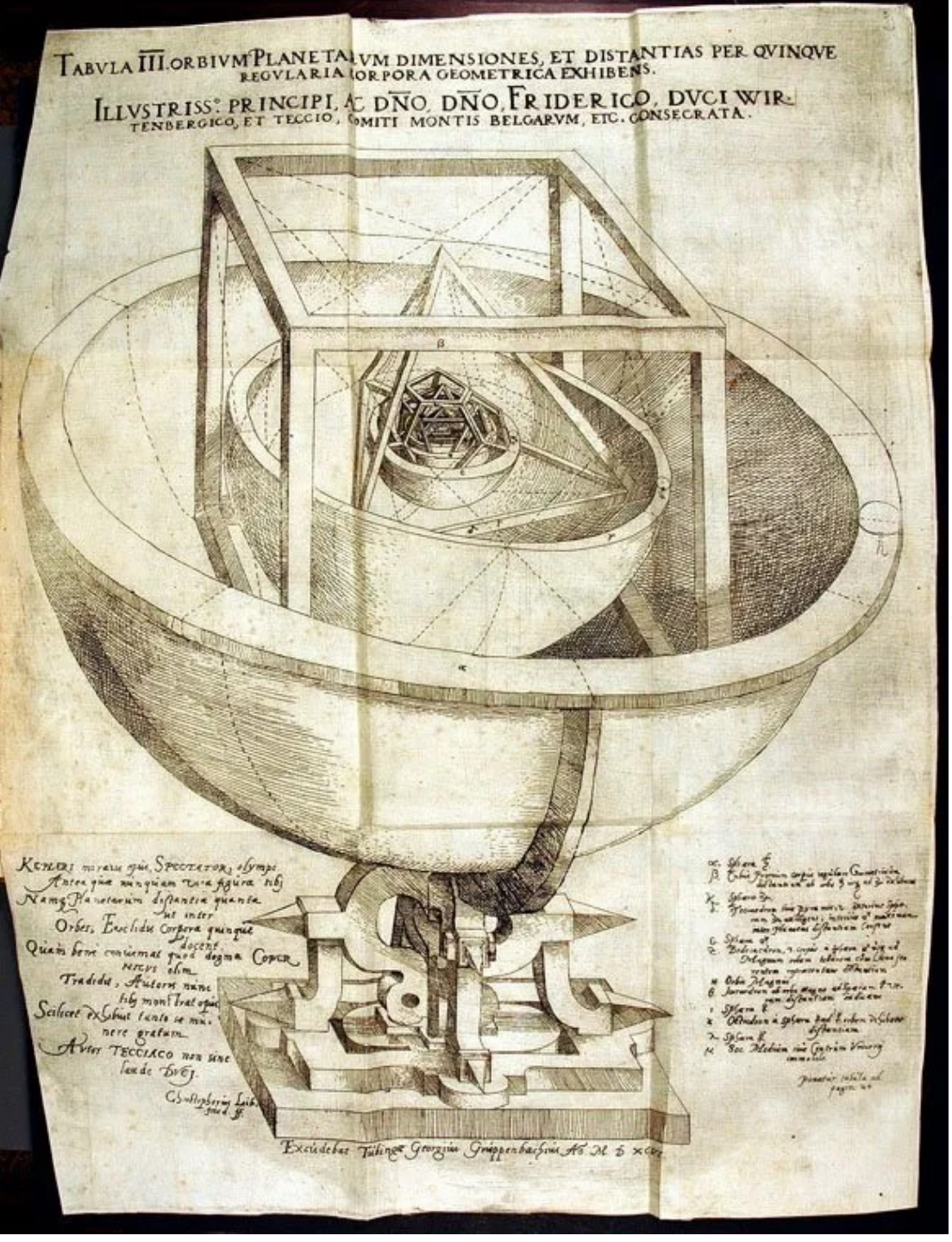
los planetas describen órbitas circulares alrededor del Sol

más allá de Saturno se encuentran las estrellas fijas



modelo de Tycho Brahe (1546-1601)

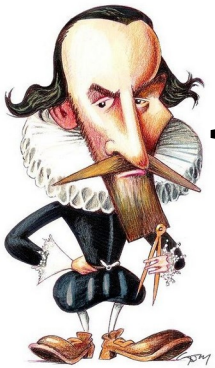
la Luna y el Sol describen órbitas circulares alrededor de la Tierra mientras los planetas describen órbitas circulares alrededor del Sol



modelo inicial de Kepler (1571-1630)

seis esferas, una para cada planeta conocido, circunscribiendo los cinco sólidos pitagóricos:

cubo, tetraedro, dodecaedro, icosaedro, octaedro



pero que necio he sido!

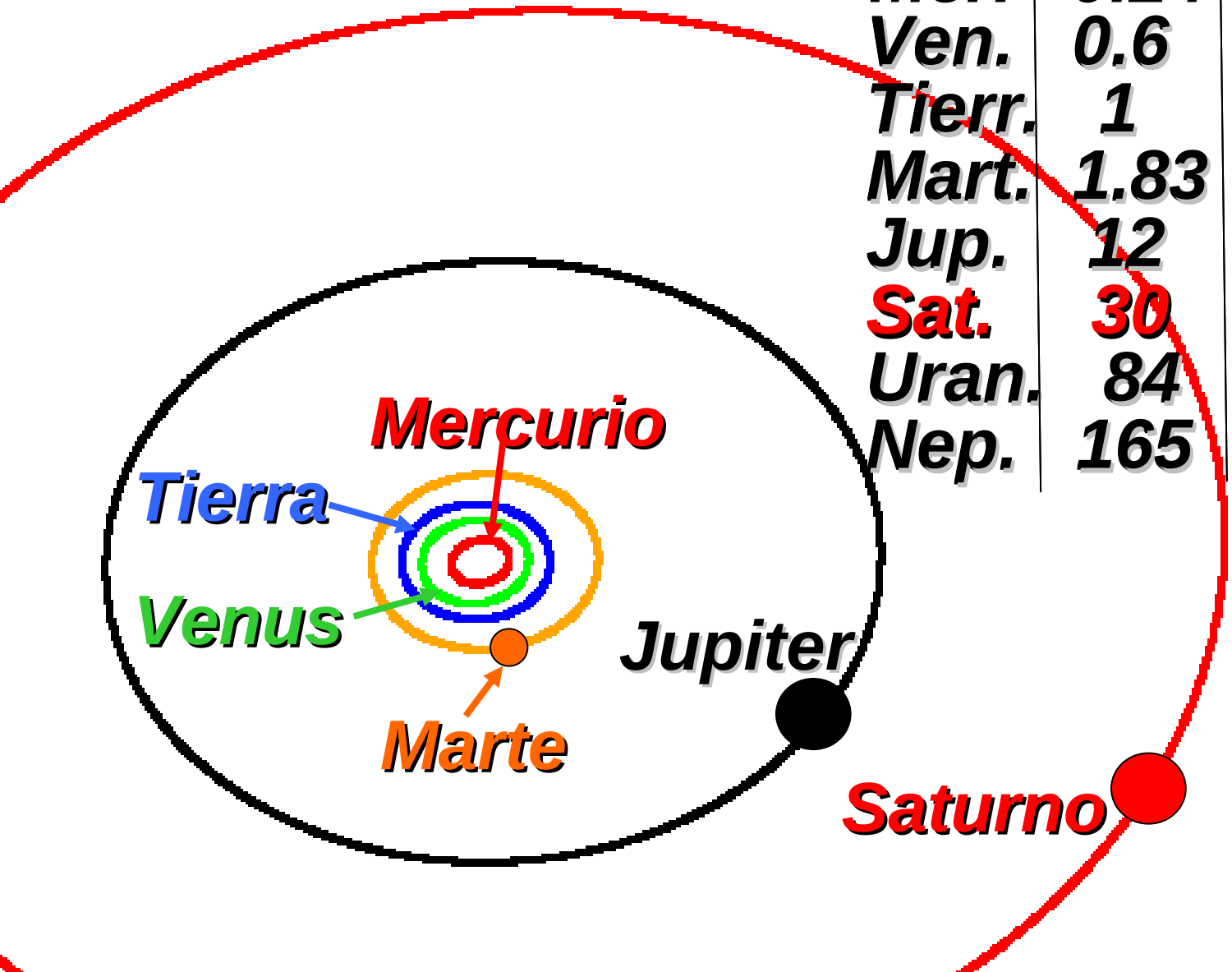
son elipses!

posiciones observadas de Tycho Brahe

primera ley de Kepler!

segunda y tercera ley de Kepler

	P años	D UA	V km/s
Mer.	0.24	0.4	48
Ven.	0.6	0.7	35
Tierr.	1	1	30
Mart.	1.83	1.5	24
Jup.	12	5	13
Sat.	30	10	10
Uran.	84	19	7
Nep.	165	30	5



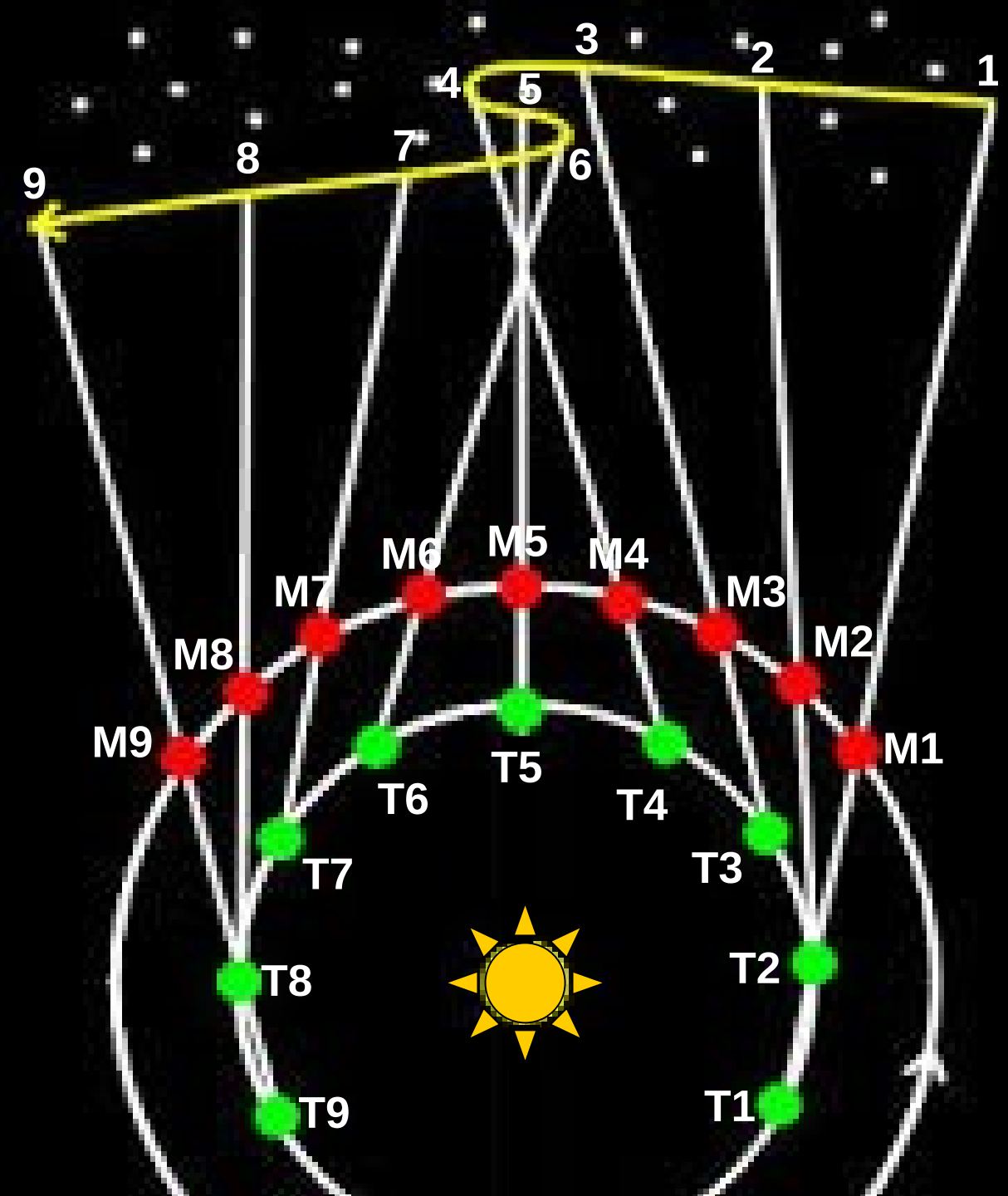
leyes de Kepler

leyes de Kepler: leyes empíricas!

primera ley de kepler: los planetas se mueven describiendo elipses de las cuales el sol ocupa uno de los focos

segunda ley de kepler: el radio vector que une el centro del planeta con el centro del sol describe áreas iguales en tiempos iguales

tercera ley de kepler: los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas son directamente proporcionales a los cubos de sus distancias medias al sol



las leyes de Kepler explican naturalmente el movimiento retrógrado de los planetas

es cuestión de perspectiva!

configuraciones planetarias

posiciones de los planetas con respecto al Sol y a la Tierra

elongación de un planeta (λ): ángulo que forman las visuales dirigidas al Sol y al planeta desde la Tierra

diferentes valores de λ

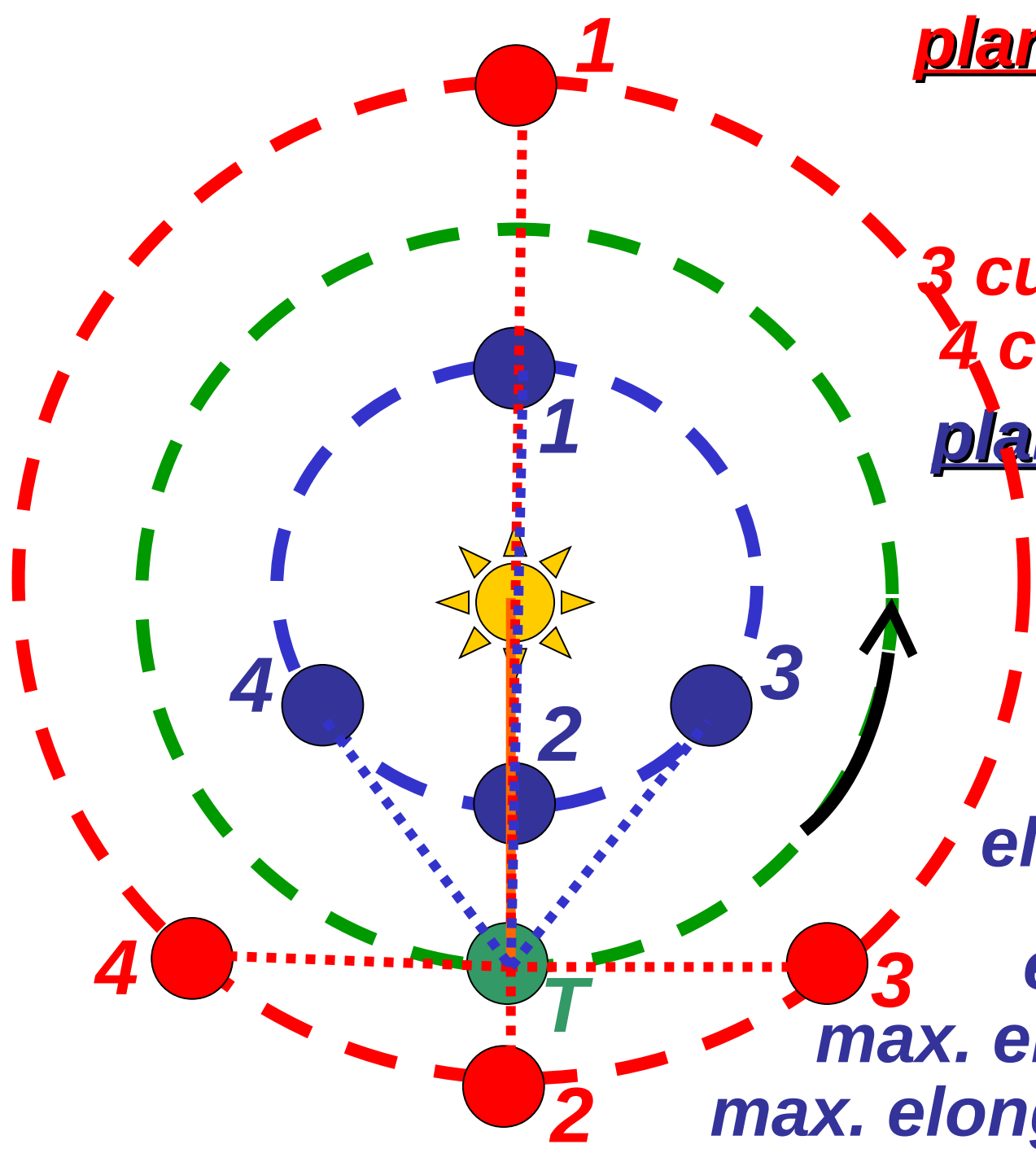
↓

diferentes configuraciones

λ = 0° –> conjunción

λ = 90° –> cuadratura

λ =180° –> oposición



planetas exteriores

1 conjunción
2 oposición
3 cuadratura oeste
4 cuadratura este

planetas interiores

1 conjunción superior
2 conjunción inferior
3 máxima elongación oeste
4 máxima elongación este

max. elong.Venus: 47°
max. elong. Mercurio: 28°

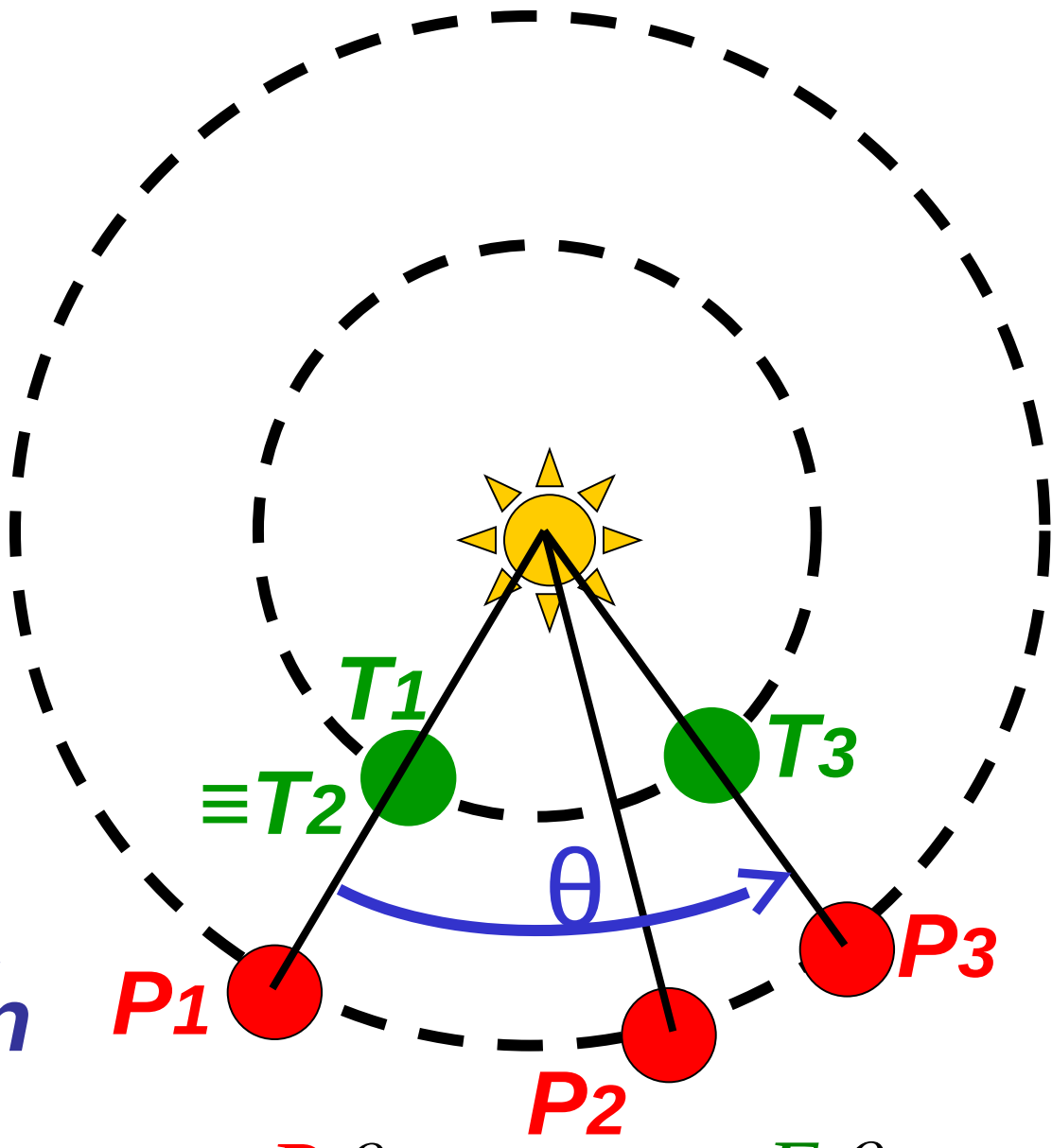
período sidéreo de un planeta: P

tiempo que le toma al planeta recorrer los 360° de su órbita

período sinódico de un planeta: S

tiempo que le toma al planeta volver a la misma configuración con respecto al sol

período sidéreo de la Tierra: E



$$S = \frac{P\,\theta}{2\,\pi} \qquad S = E + \frac{E\,\theta}{2\,\pi}$$

planetas interiores

per. sinódico del planeta → $\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{E}$ ← per. sidéreo de la tierra

per. sidéreo del planeta

planetas exteriores

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{E} - \frac{1}{P}$$

el período sinódico es fácilmente determinado a partir de la observación conociendo el período sidéreo de la Tierra pueden calcularse los períodos sidéreos de los planetas

planeta	*período sidéreo [años]*	*período sinódico [años]*	*período sinódico [días]*
Mercurio	*0.24*	*0.32*	*115.93*
Venus	*0.62*	*1.60*	*585.96*
Marte	*1.88*	*2.14*	*779.88*
Júpiter	*11.86*	*1.09*	*398.88*
Saturno	*29.46*	*1.04*	*378.08*
Urano	*84.01*	*1.01*	*369.65*
Neptuno	*164.79*	*1.01*	*367.48*

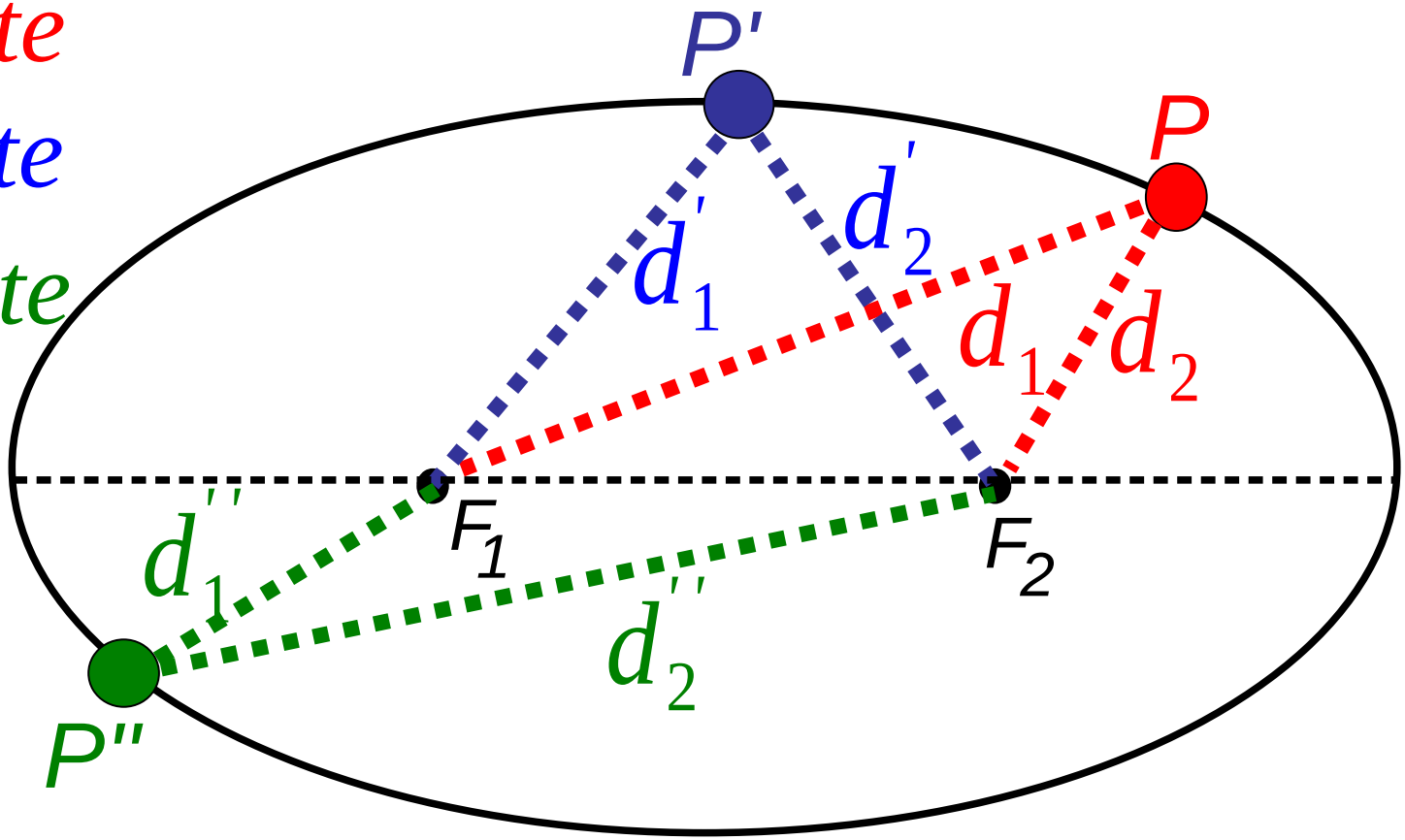
primera ley de kepler: los planetas se mueven describiendo elipses de las cuales el sol ocupa uno de los focos

definición de elipse: lugar geométrico de los puntos del plano cuyas sumas de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante

$$d_1 + d_2 = Cte$$

$$d_1' + d_2' = Cte$$

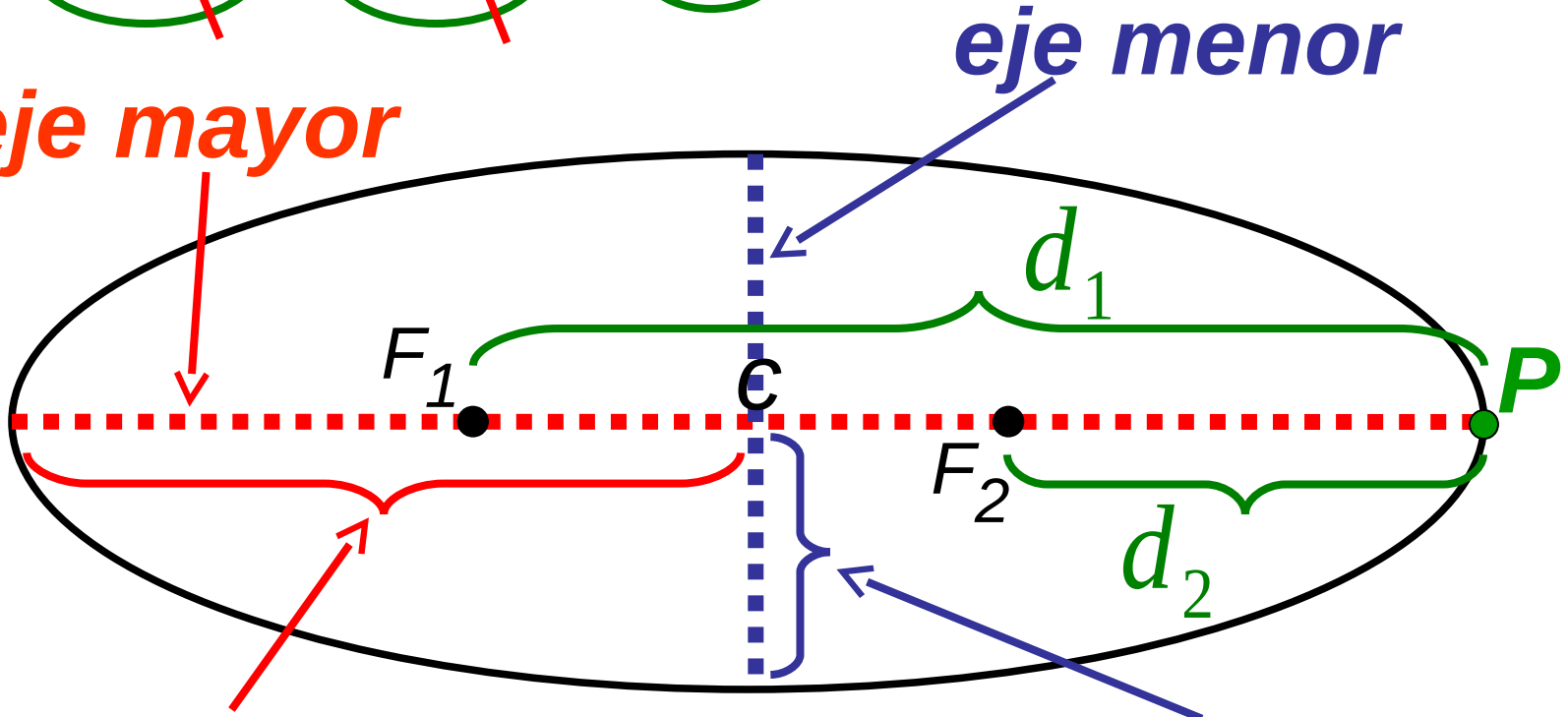
$$d_1'' + d_2'' = Cte$$



excentricidad = e = cF/a $\Longrightarrow$ cF = e a

$d_1 + d_2 = Cte$

a+ae + a-ae = 2a

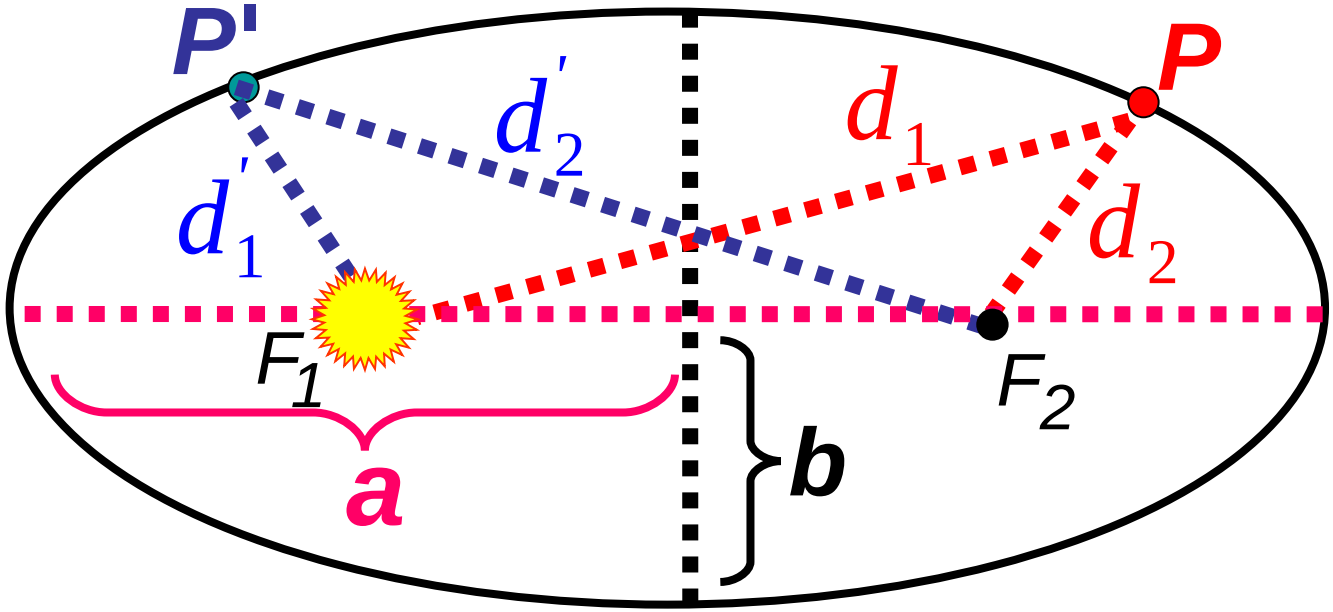


distancia media de un planeta al sol

$$\frac{d_1 + d_1'}{2} = ?$$

$$\left.\begin{array}{l} d_1 = d_2' \\ d_1' = d_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d_1 + d_1'}{2} = \frac{d_1 + d_2}{2} = a$$

la distancia media de un planeta al sol es igual al semieje mayor de su órbita



$d_1 + d_2 = 2a$ ➡ *para el punto P de la figura* $d_1 = d_2 = a$

$a^2 = b^2 + (ae)^2$ ➡ $b = \sqrt{a^2 - (ae)^2} = a\sqrt{1 - e^2}$

$d_p = a - ae = a(1-e)$

$d_a = a + ae = a(1+e)$

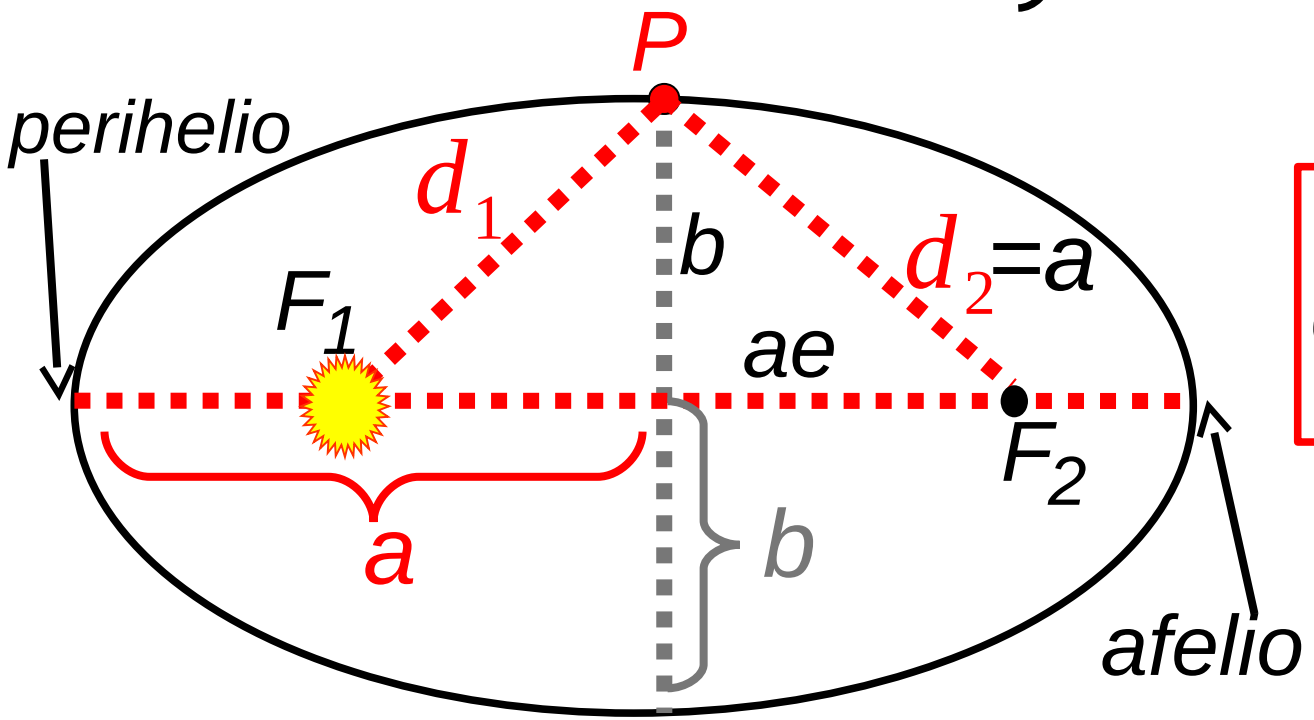
➡

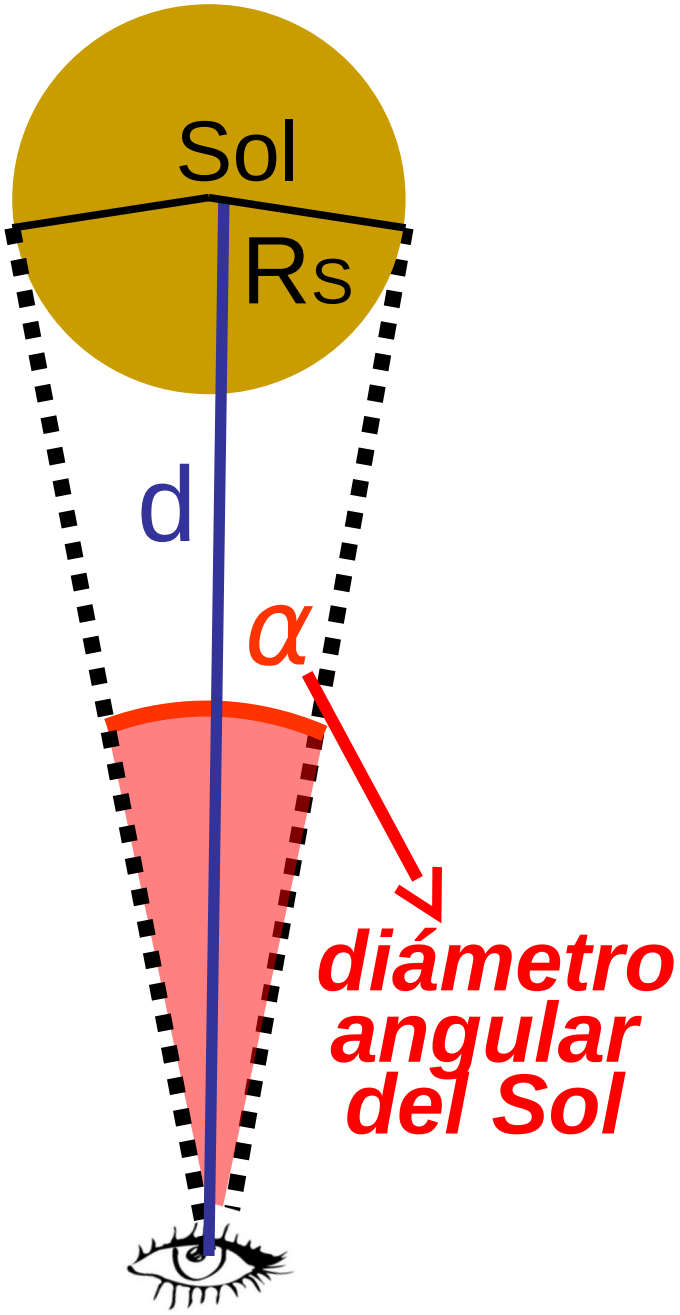
$d_a + d_p = 2a$

$d_a - d_p = 2ae$

⬇

$$e = \frac{d_a - d_p}{d_a + d_p}$$





$$tg\alpha/2 \approx \alpha/2 = Rs/d$$

$$d = 2\,Rs/\alpha$$

reemplazando en

$$e = \frac{d_a - d_p}{d_a + d_p}$$

$$e = \frac{\alpha_p - \alpha_a}{\alpha_p + \alpha_a}$$

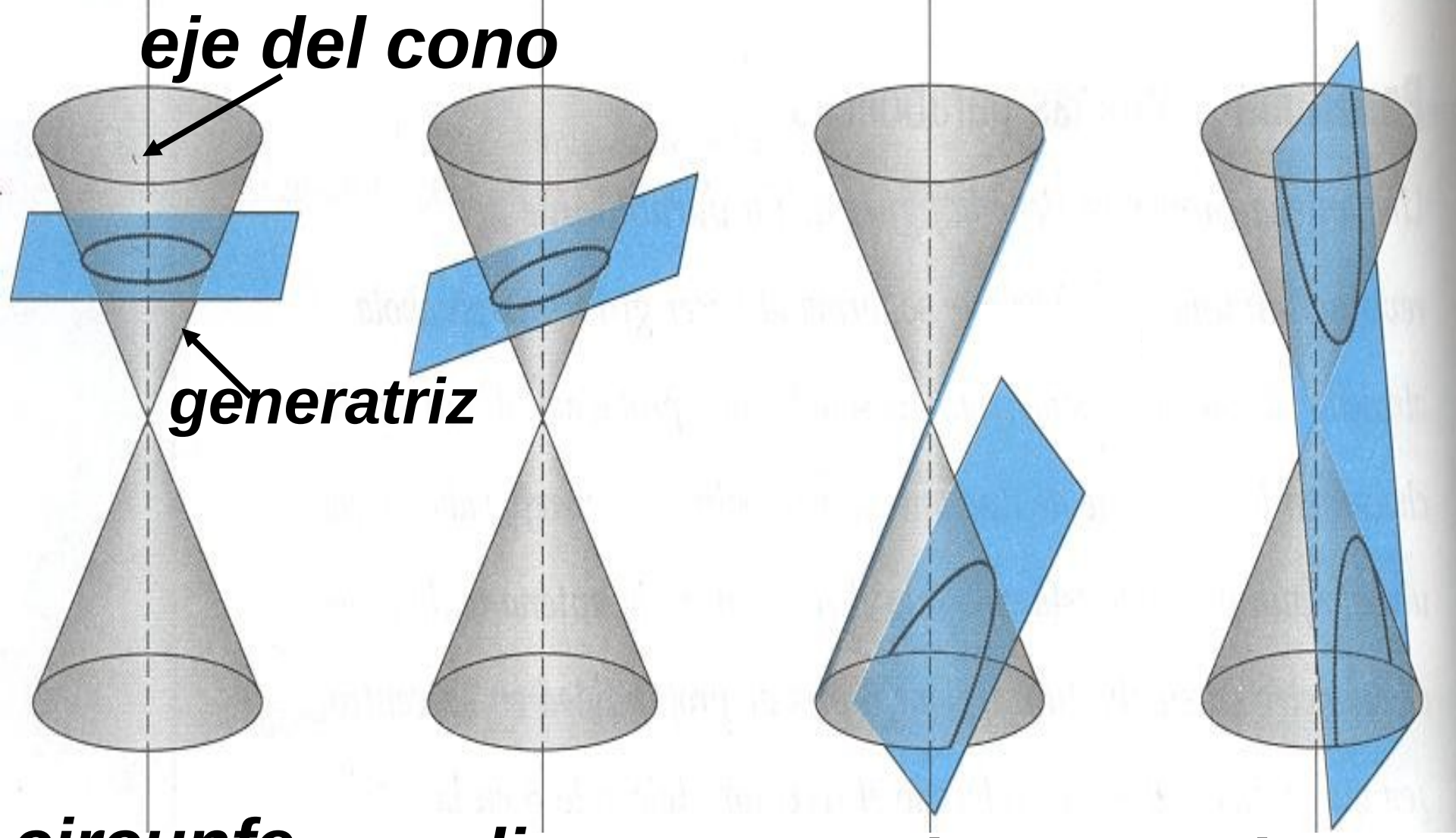
qué se obtiene a partir de las leyes de la mecánica clásica ?

a partir de las tres leyes de Newton y de la ley de gravitación universal se deduce que un cuerpo orbitando alrededor de otro bajo la atracción gravitatoria mutua describe una cónica

cualquier cónica!

elipse ***circunferencia*** ***parábola*** ***hipérbola***

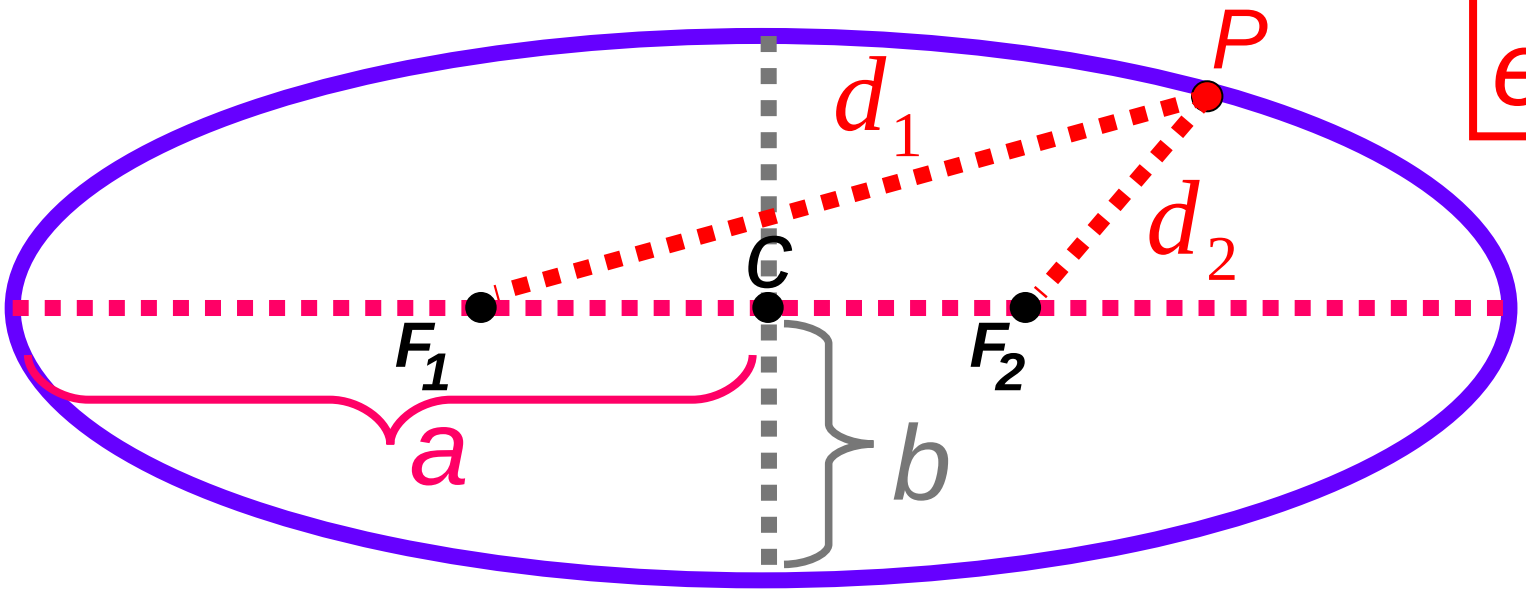
curvas obtenidas al seccionar un cono con un plano


eje del cono
generatriz
circunfe-
rencia
elipse
parábola
hipérbola
curvas cerradas
curvas abiertas

elipse: ***lugar geométrico de los puntos del plano cuyas sumas de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante***

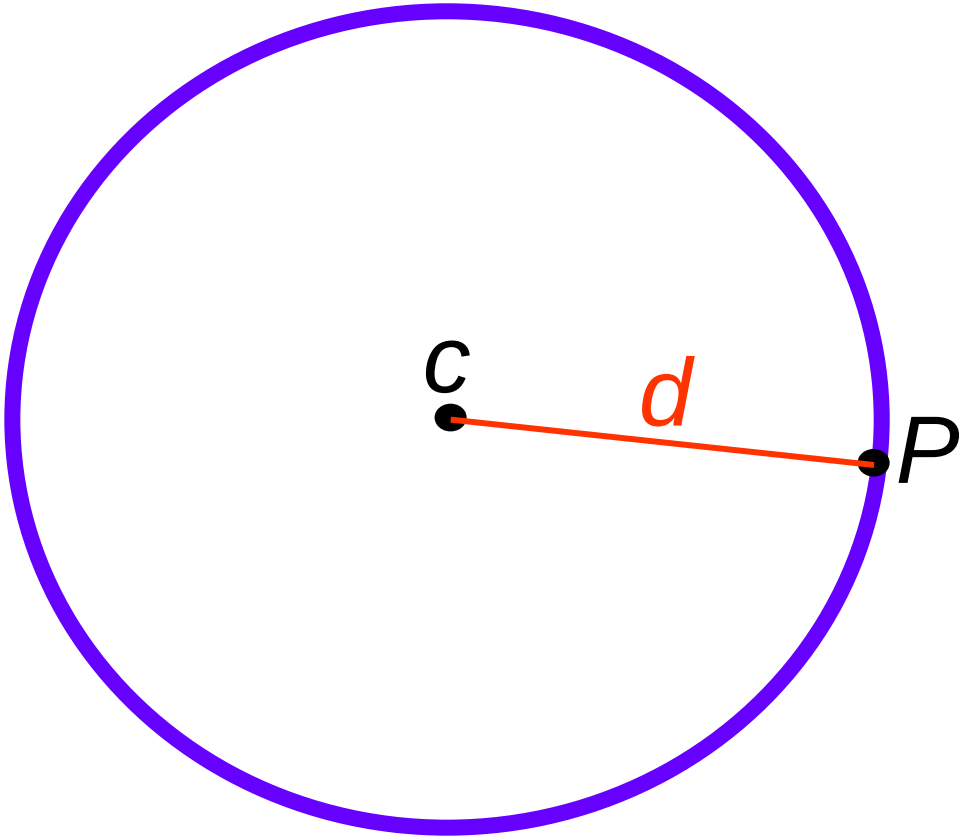
$e=cF/a$

$e<1$



$$d_1+d_2=2a$$

***circunferencia:* lugar geométrico de los puntos del plano cuyas distancias a un punto fijo llamado centro es constante**

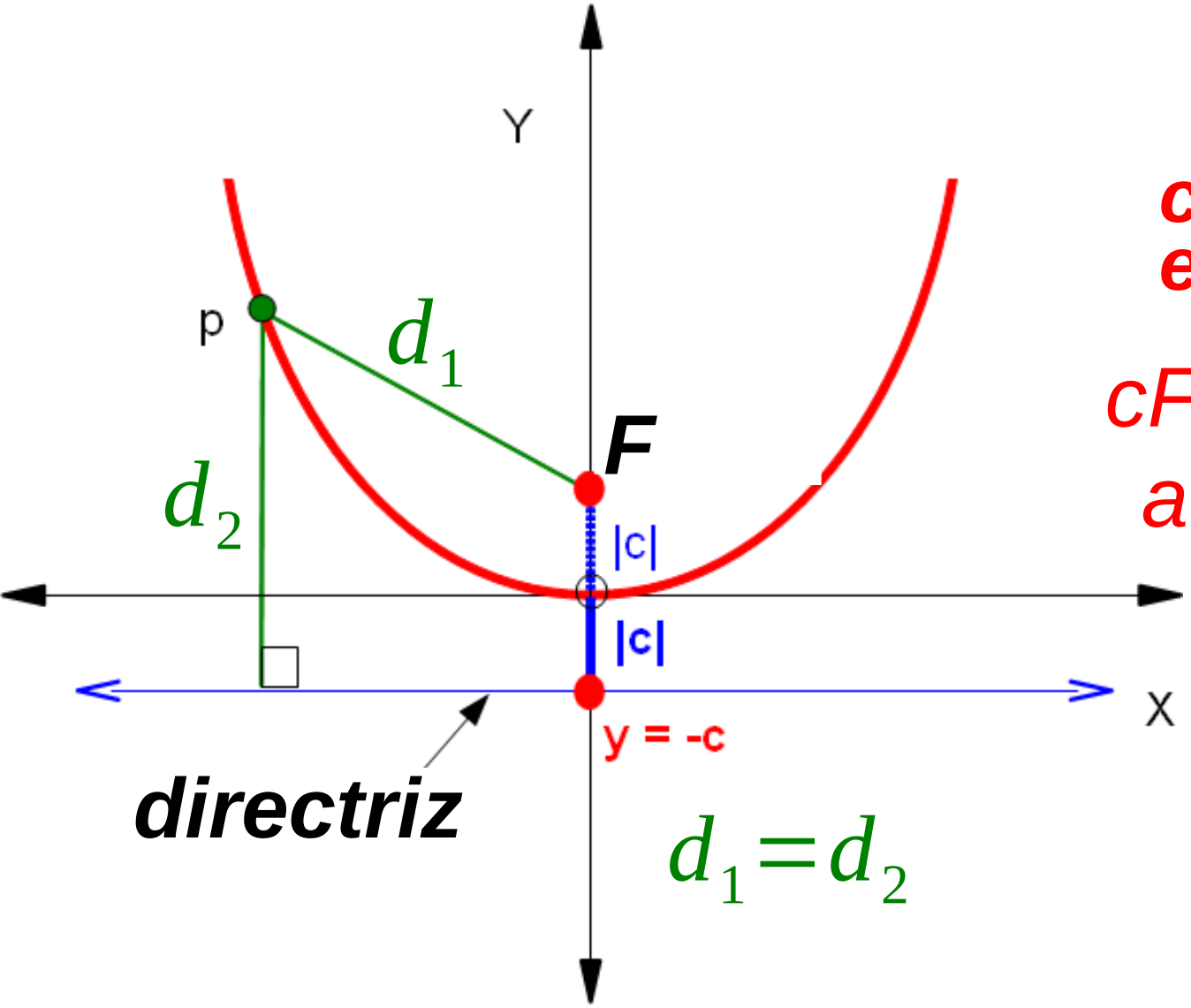


$d=cte=R$

$e=cF/a$

$cF=0 \Rightarrow \boxed{e=0}$

parábola: ***lugar geométrico de los puntos del plano que equidistas de un punto fijo llamado foco y una recta fija llamada directriz***

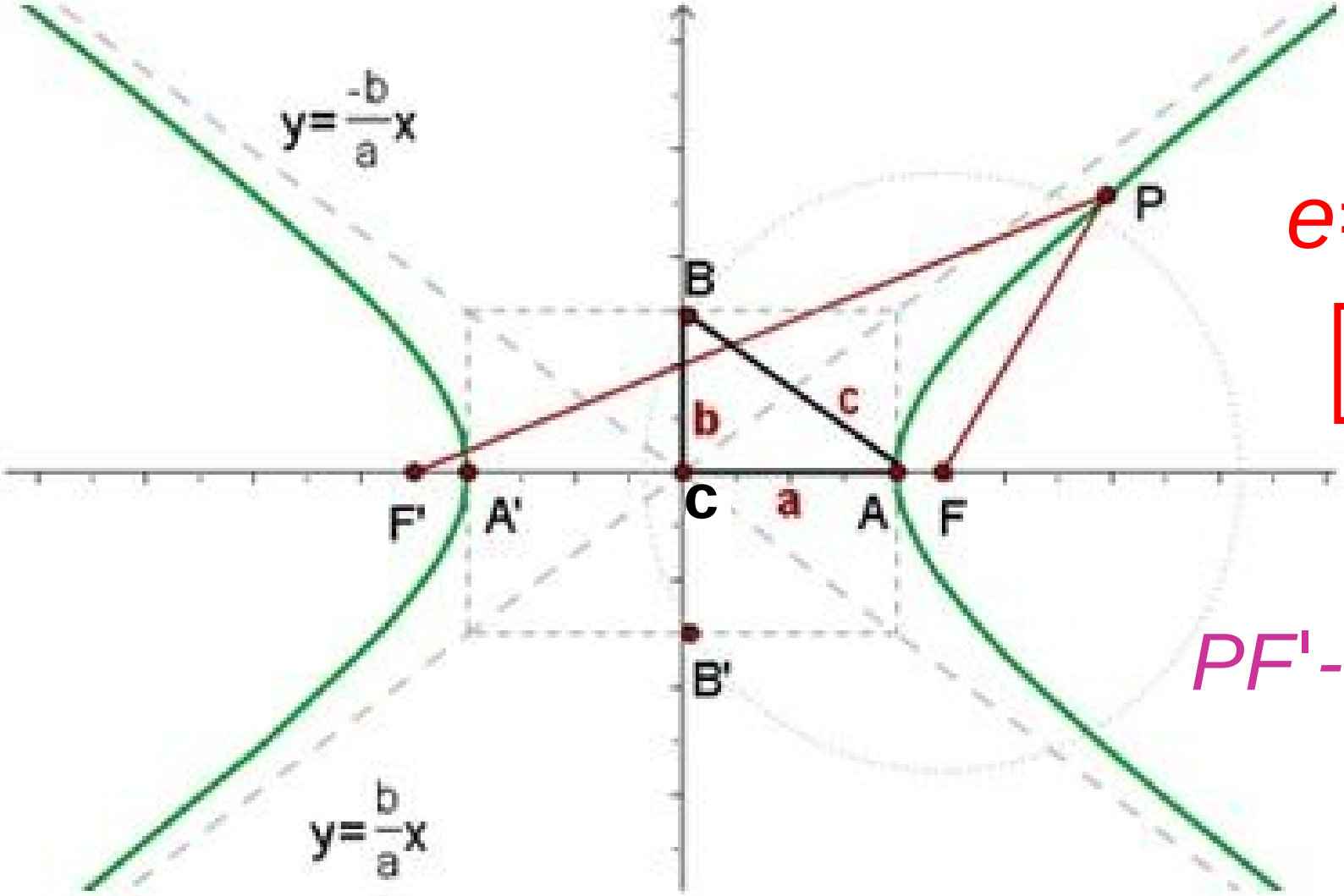


$e = cF/a$

centro en el infinito

$cF \to \infty$
$a \to \infty$
$\Rightarrow$ $e=1$

hipérbola: ***lugar geométrico de los puntos del plano cuyas diferencias de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante***



$e=cF/a$

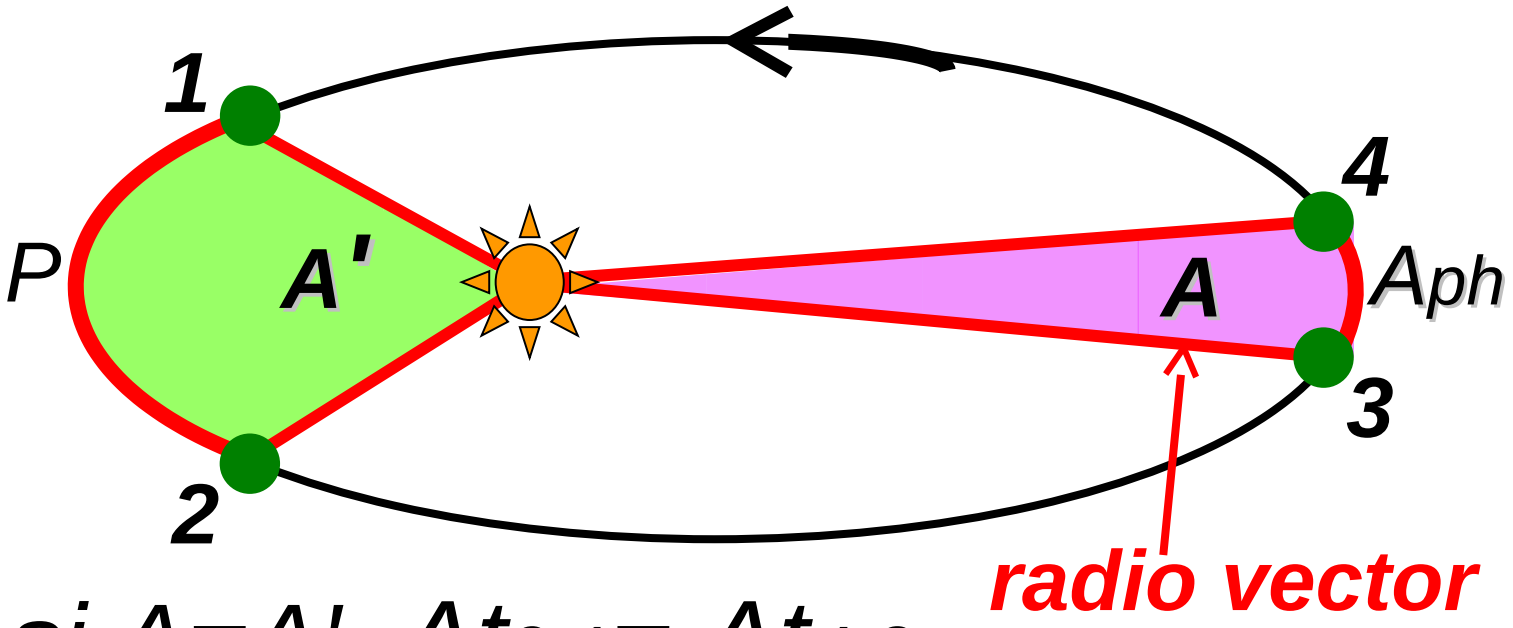
$e>1$

$PF'-PF=2a$

segunda ley de kepler (o ley de las áreas): el radio vector que une el centro del planeta con el centro del Sol describe áreas iguales en tiempos iguales

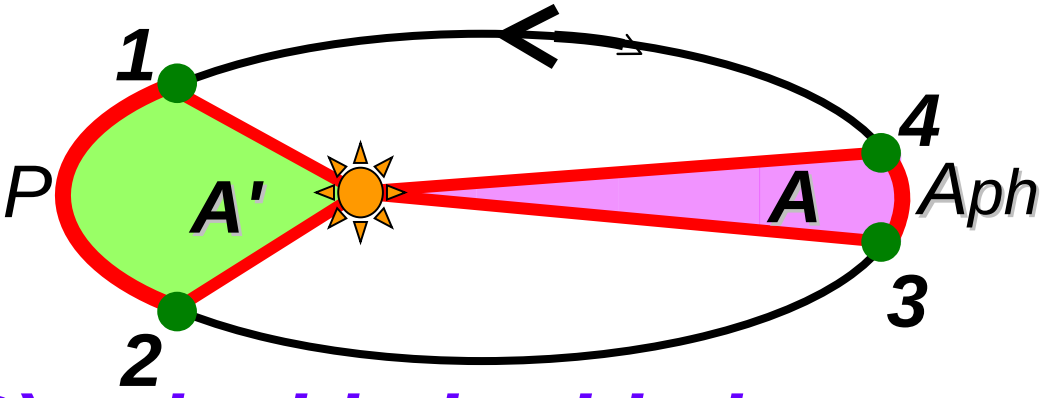
el radio vector barre el área A' en el intervalo de tiempo Δt'

el radio vector barre el área A en el intervalo de tiempo Δt

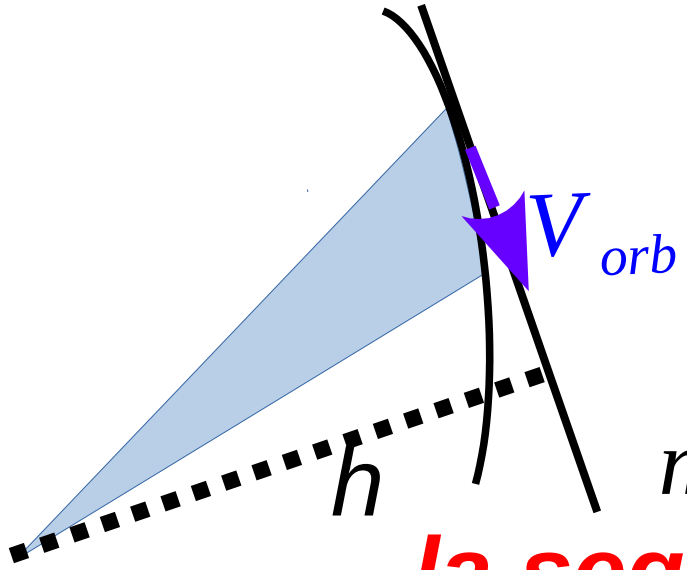


si $A=A'$, $\Delta t_{2,1}= \Delta t_{4,3}$

si $\Delta t = \Delta t'$, $A = A'$



1) velocidad areal constante



2) velocidad orbital cerca del perihelio mayor que cerca del afelio

$$V_{ar} = \frac{A}{\Delta t} = \frac{V_{orb}\,\Delta t\, h}{2\,\Delta t}$$

$$V_{orb}\,h = Cte \Rightarrow m\,V_{orb}\,h = Cte$$

$$m\,V_{orb}\,h = L$$ **=momento angular**

la segunda ley de Kepler es equivalente al principio de conservación del momento angular

***tercera ley de kepler* (o ley armónica): los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas son directamente proporcionales a los cubos de sus distancias medias al Sol**

$$\frac{P^2}{a^3} = Cte \Rightarrow \frac{P_M^2}{a_M^3} = \frac{P_V^2}{a_V^3} = \frac{P_T^2}{a_T^3} = \ldots$$

si conocemos el período y la distancia media al Sol de alguno de los planetas podemos calcular la constante

para la Tierra $\begin{cases} P=1 \text{ año} \\ a=1 \text{ UA} \end{cases}$ ⇒ $\boxed{\dfrac{P^2}{a^3}=1}$

cuidado! sólo válida para cuerpos que giran alrededor del Sol y siempre que los períodos de revolución estén expresados en años y las distancias medias al sol en unidades astronómicas

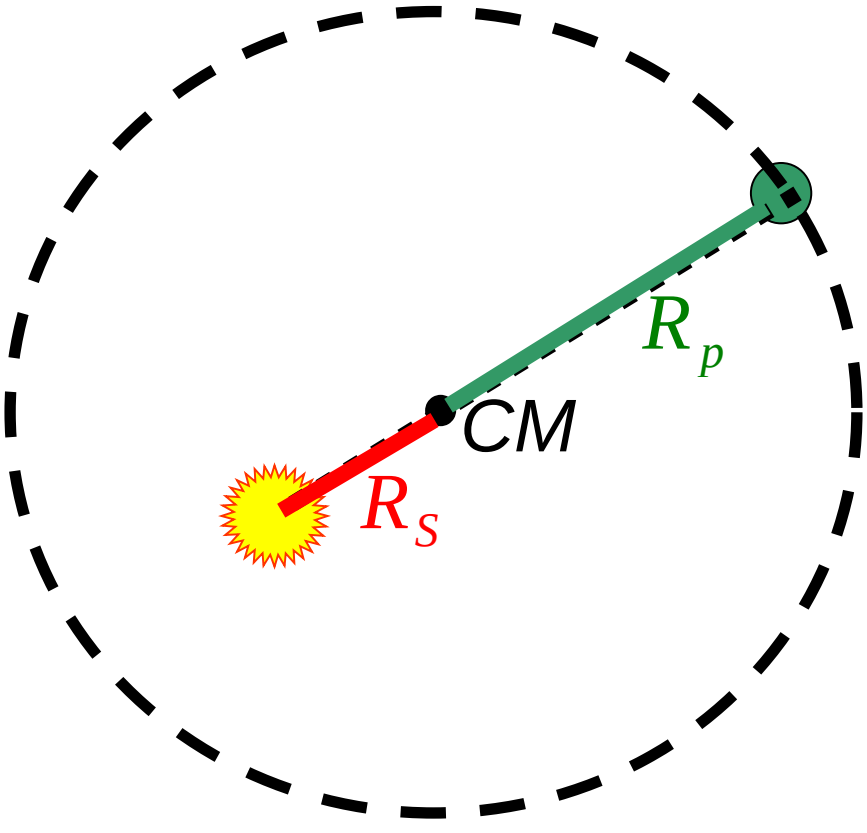
qué se obtiene a partir de las leyes de la mecánica clásica ?

a) órbitas circulares

$F = ma$

fuerza de atracción gravitatoria mutua

aceleración centrípeta



$$G\frac{m_p M_S}{(R_p+R_S)^2}=\frac{m_p V_{orb,p}^2}{R_p} \quad (1)$$

$$V_{orb,p}=\frac{2\pi R_p}{P} \quad (2)$$

$$\frac{R_S}{R_p}=\frac{m_p}{M_S} \quad (3) \qquad R_S+R_p=a \quad (4)$$

reemplazando (2), (3) y (4) en (1) $\Longrightarrow$

$$\frac{P^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{G(M_S+m_p)}$$

b) órbitas no circulares

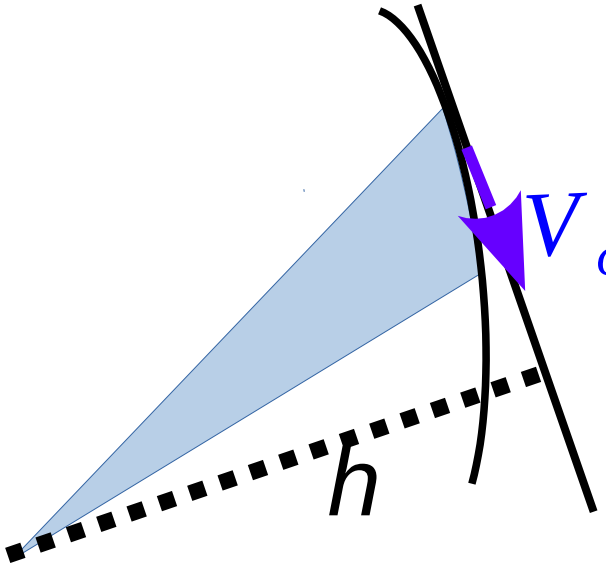
principio de conservación de la energía mecánica: $Ec + Ep = Em = Cte$

$$\frac{1}{2}\frac{mM}{(m+M)}V^2 - G\frac{mM}{r} = Em = Cte$$

en particular $Em,A = Em,P$

$$\frac{1}{2}\frac{mM}{(m+M)}V_A^2 - G\frac{mM}{r_A} = \frac{1}{2}\frac{mM}{(m+M)}V_P^2 - G\frac{mM}{r_P} \quad \textbf{(1)}$$

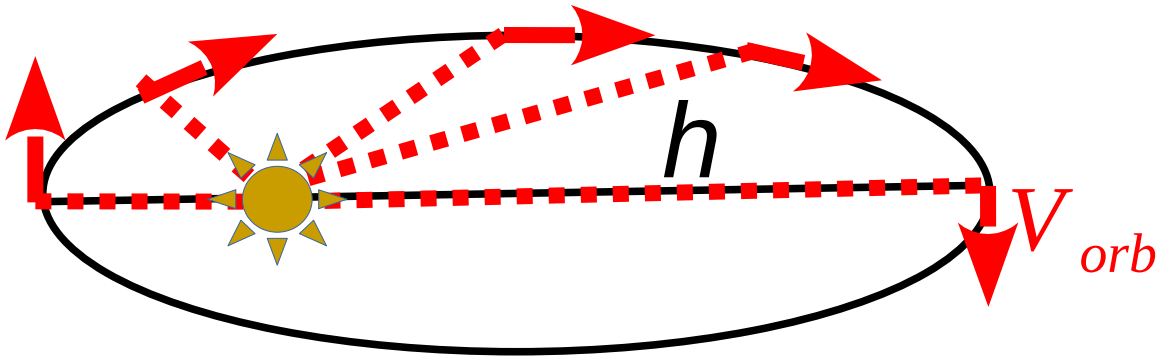
$r_A = a(1+e)$ **(2)** $\qquad$ $r_P = a(1-e)$ **(3)**



$$V_{ar} = \frac{V_{orb}\, h}{2} \qquad V_{orb} = \frac{2\, V_{ar}}{h}$$

V_{ar} = *área elipse / período*

$$V_{ar} = \frac{\pi a b}{P} \qquad V_{orb} = \frac{2\pi a b}{P h}$$ ¿



$$V_{orb,p} = \frac{2\pi a b}{P\, r_p} \quad (4)$$

$$V_{orb,A} = \frac{2\pi a b}{P\, r_A} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2}\frac{mM}{(m+M)}V_A^2 - G\frac{mM}{r_A} = \frac{1}{2}\frac{mM}{(m+M)}V_P^2 - G\frac{mM}{r_P} \quad (1)$$

$$r_A = a(1+e) \quad (2)$$

$$r_P = a(1-e) \quad (3)$$

$$V_{orb,p} = \frac{2\pi a b}{P r_p} \quad (4)$$

$$V_{orb,A} = \frac{2\pi a b}{P r_A} \quad (5)$$

reemplazando (2), (3), (4) y (5) en (1)

⇩

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_S + m_P)}$$

la tercera ley de Kepler es equivalente al principio de conservación de la energía mecánica

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$$

válida para TODO! par de cuerpos moviéndose bajo la atracción gravitatoria mutua

para la Tierra y la Luna $\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_T+m_L)}$

para Júpiter y Ganímedes $\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_J+m_G)}$

para el Sol y un planeta $\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_S+m_p)}$

para los planetas del Sistema Solar
m_p es despreciable frente a M_S

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G M_S}$$

la misma cte para todos los planetas!

energía mecánica del sistema

principio de conservación de la energía mecánica ⇒ $Ec + Ep = Em = Cte$

Em es la misma para todos los puntos de la órbita, pero cuanto vale Em ?

para una órbita elíptica (planteando la expresión para E_m en el afelio):

$$\frac{1}{2}\frac{mM}{(m+M)}V_A^2 - G\frac{mM}{r_A} = Em$$

$$\Downarrow$$

$$Em = -G\frac{mM}{2a}$$

$$\frac{1}{2}\frac{mM}{(m+M)}V_A^2 - G\frac{mM}{r_A} = Em$$

para una órbita elíptica: $Em = -G\frac{mM}{2a}$

para una órbita circular: $Em = -G\frac{mM}{2R}$

para una órbita parabólica: $Em = 0$

para una órbita hiperbólica: $Em = G\frac{mM}{2a}$

velocidad en la órbita

órbita hiperbólica

$$\frac{1}{2}\frac{mM}{(m+M)}V^2 - G\frac{mM}{r} = \pm\frac{GMm}{2a}$$

órbita elíptica (o circular)

$$V^2 = G(M+m)\left(\frac{2}{r} \pm \frac{1}{a}\right)$$

órbita circular $\Rightarrow r = a = R \Rightarrow V^2 = \dfrac{G(M+m)}{R}$

$$V^2 = G(M+m)\left(\frac{2}{r} \pm \frac{1}{a}\right)$$

órbita parabólica $\Rightarrow a \to \infty \Rightarrow$ $$V^2 = G(M+m)\left(\frac{2}{r}\right)$$

↓

velocidad de escape

↓

velocidad mínima que se debe imprimir a un cuerpo para escapar de la atracción gravitatoria de otro

satélites artificiales

lanzamiento de un satélite artificial ⟹ ***dos etapas:***

1) transporte hasta el punto de inyección

2) puesta en órbita

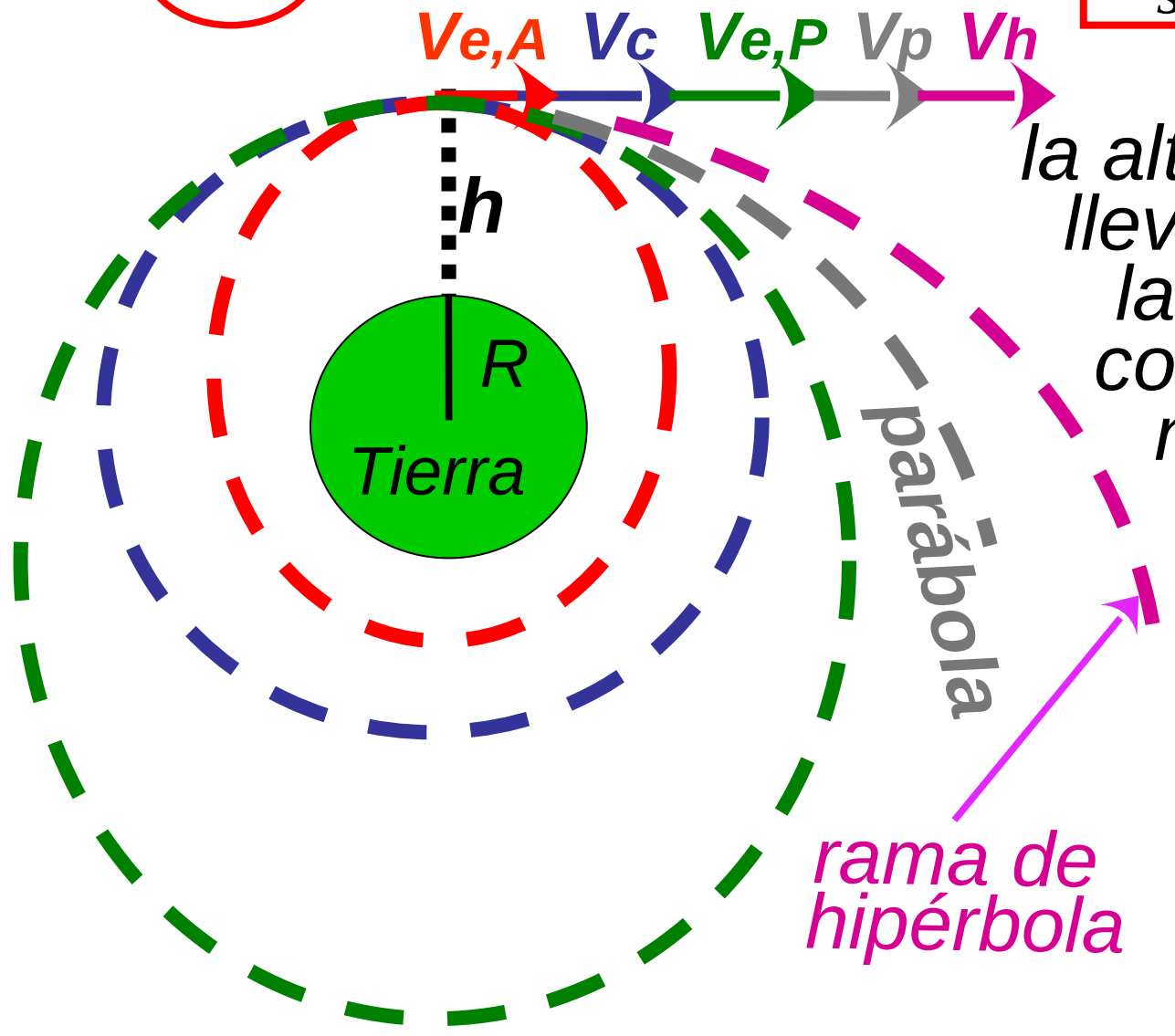
la órbita que describa dependerá sólo de la intensidad y dirección de la velocidad inicial !

si la dirección de la velocidad inicial es paralela a la tangente a la superficie de la tierra, ese punto de la órbita será cualquier punto de una órbita circular, el apogeo o el perigeo de una órbita elíptica, o el vértice de una órbita parabólica o hiperbólica

$$V^2 = G\left(M+m\right)\left(\frac{2}{r} \pm \frac{1}{a}\right)$$

$R+h$

$$\frac{P_s^2}{a_s^3} = \frac{4\,\pi^2}{G\left(M_t + m_s\right)}$$



la altura a la que sea llevado el satélite y la velocidad inicial conferida determinarán su período

si $V_{e,A}$, $a<R+h$
si V_c, $a=R+h$
si $V_{e,P}$, $a>R+h$

rama de hipérbola

satélites geoestacionarios

satélites artificiales que mantienen siempre la misma posición en el cielo respecto a un observador terrestre

1) plano de la órbita paralelo al plano ecuatorial

2) período orbital = 24h

aplicando la tercera ley de Kepler generalizada por Newton al sistema Tierra-Luna y al sistema Tierra-satélite:

$$\frac{P_L^{\,2}}{a_L^{\,3}} = \frac{4\pi^2}{G\left(M_T + \cancel{m_L}\right)} \qquad \frac{P_s^{\,2}}{a_s^{\,3}} = \frac{4\pi^2}{G\left(M_T + \cancel{m_s}\right)}$$

$$\frac{P_L^{\,2}}{a_L^{\,3}} = \frac{P_s^{\,2}}{a_s^{\,3}}$$

período sidéreo de la Luna= 27.32 días

período sidéreo del satélite= 1 día

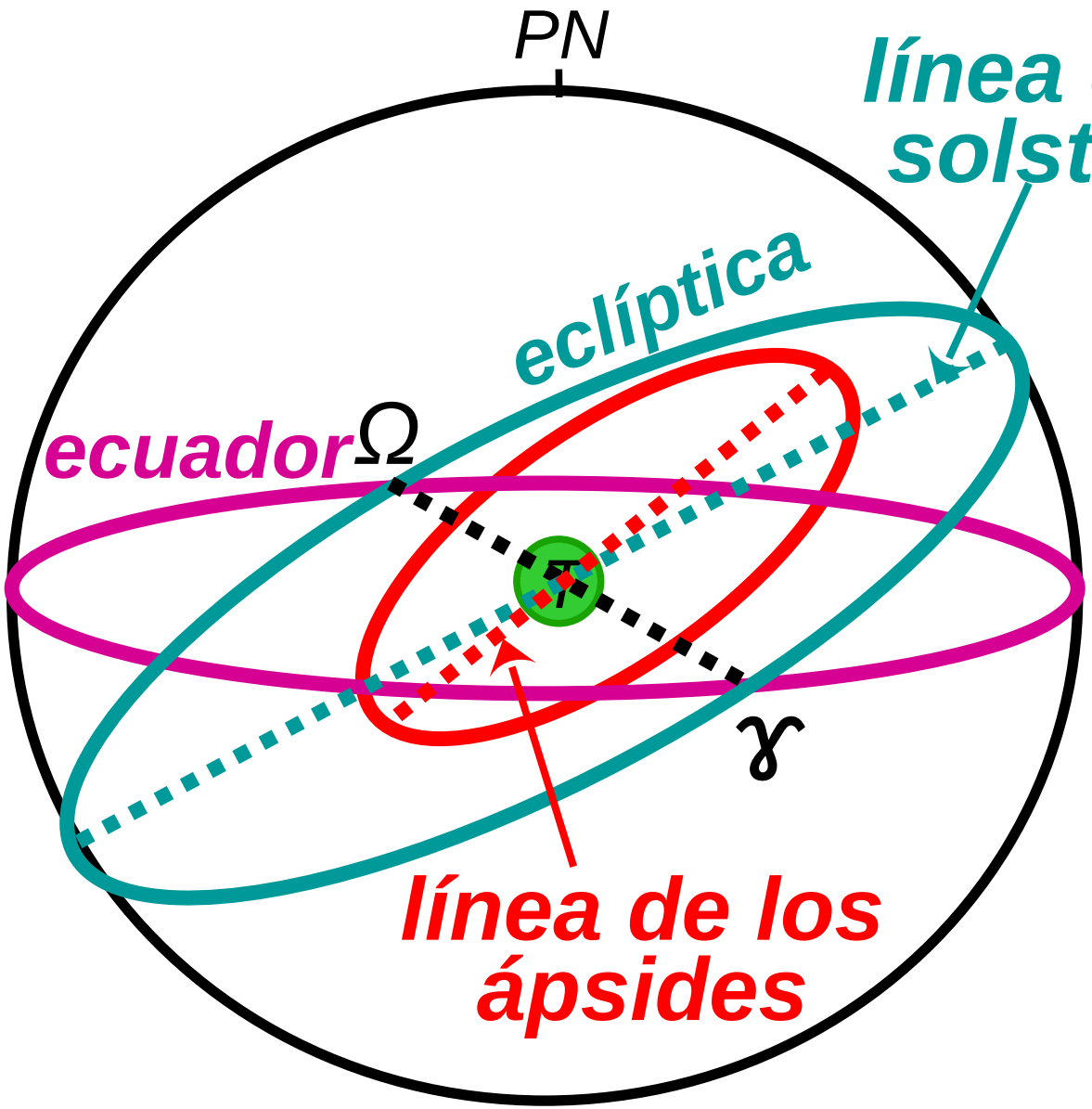
semieje mayor de la órbita lunar= 384400km

$$\left(a_s = \frac{P_s^{\,2}}{P_L^{\,2}} a_L^{\,3} \right)^{1/3} = 42397.63\,km$$

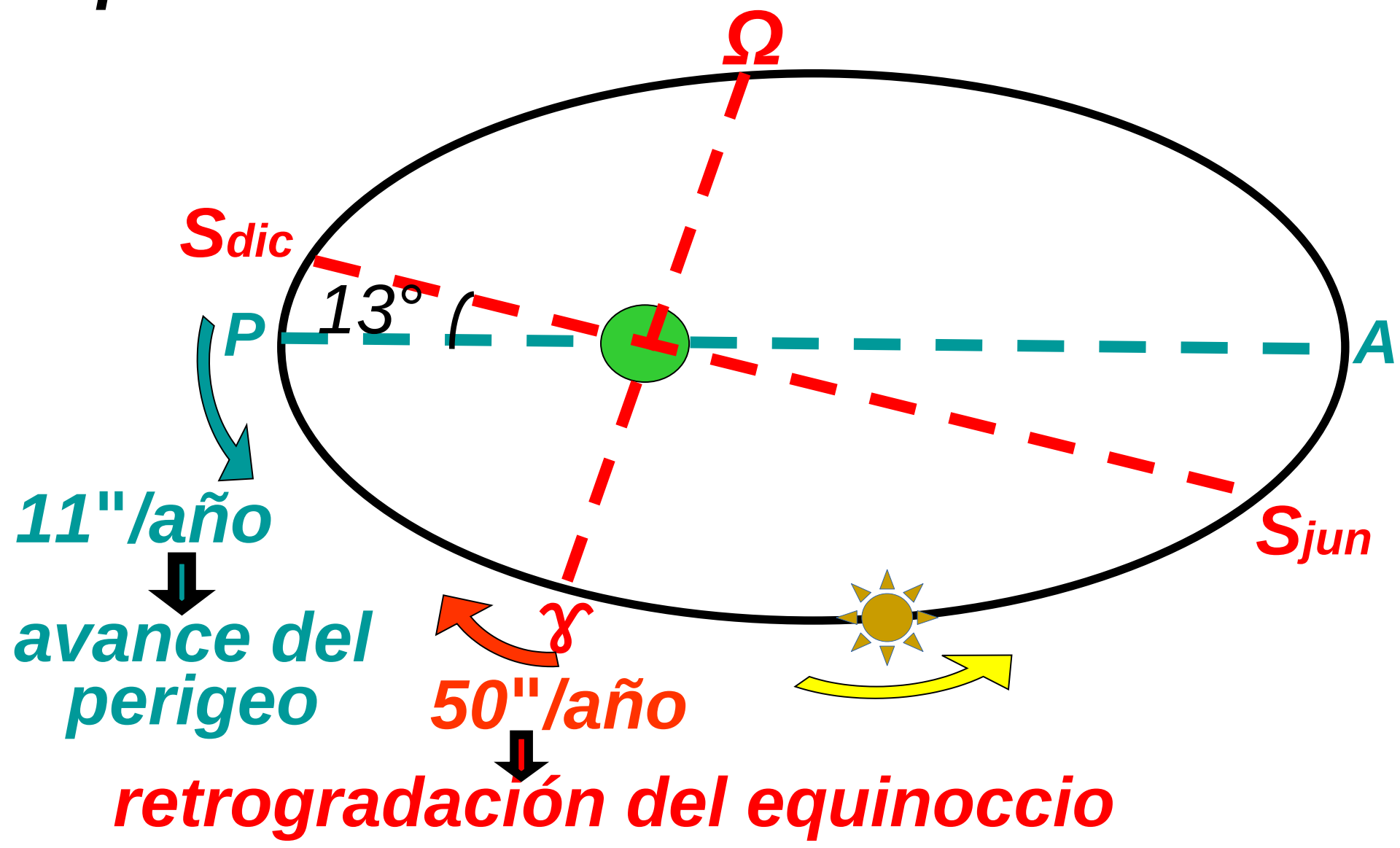
$R_T = 6371\,km$ → *altura del satélite sobre la superficie terrestre:* $h = 36026\,km$

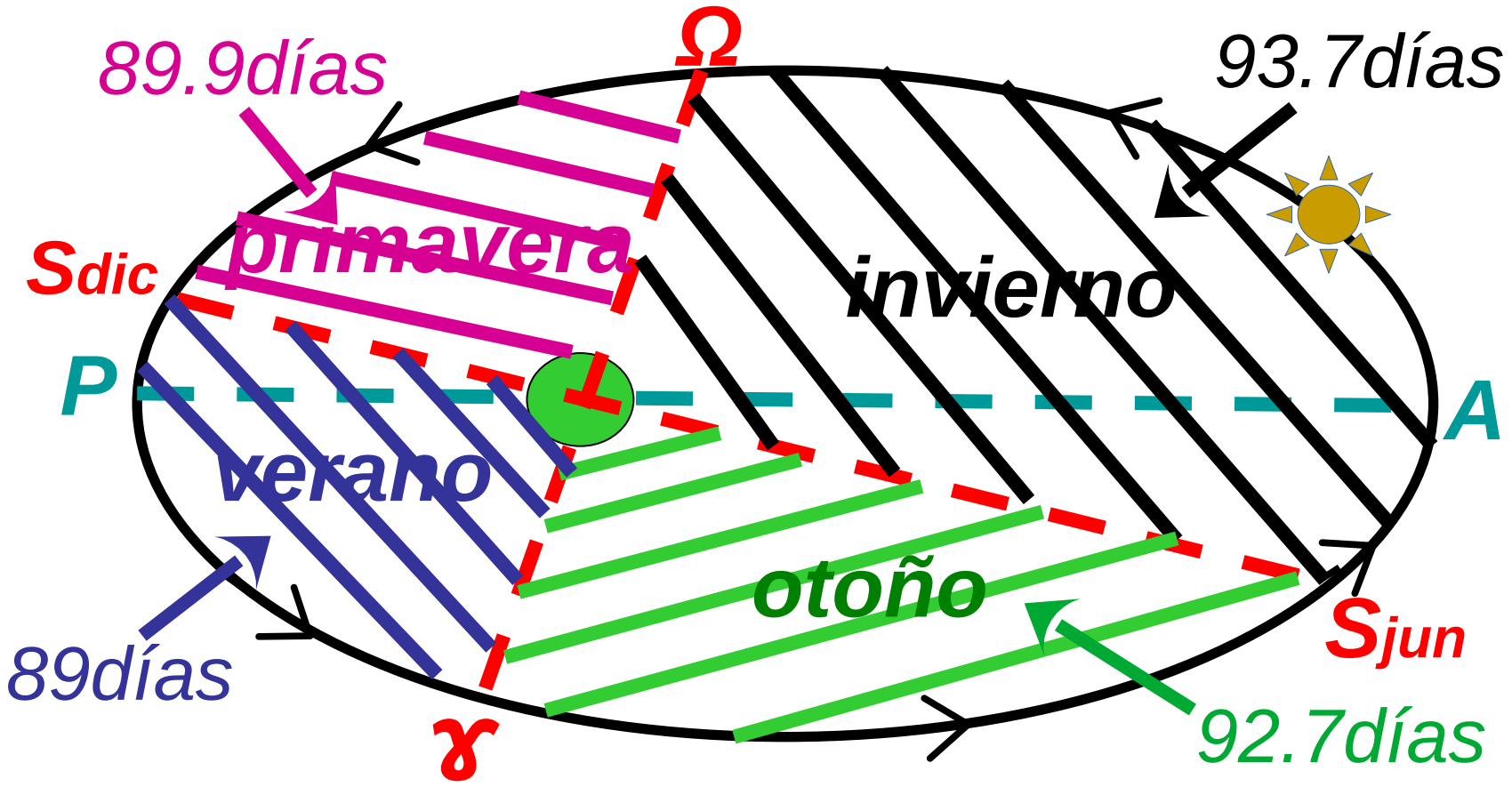
cálculo exacto sobre el ecuador: $h = 35786\,km$

desigual duración de las estaciones



la línea de las ápsides y la línea de los equinoccios coinciden cada 21000 años





segunda ley de Kepler

⇩

áreas iguales se recorren en tiempos iguales

⇩

desigual duración de las estaciones